# Straight line in SPACE

**Thm** দুটা বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ কাৰ্টেজীয় সমীকৰণ:

**Soln** আমি জানো যে $\vec{a}, \vec{b}$ অৱস্থান ভেক্টৰ বিশিষ্ট দুটা বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \qquad (1)$$

ইয়াত $\vec{a} = x_1 i + y_1 j + z_1 k$, $\vec{b} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$

যিহেতু $\vec{r}$ হ'লে যিকোনো বিন্দু $P(x, y, z)$ৰ অৱস্থান ভেক্টৰ সেয়ে আমি লিখিব পাৰো

$$\vec{r} = xi + yj + zk$$

$$(1) \Rightarrow xi + yj + zk = x_1 i + y_1 j + z_1 k + \lambda\{(x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k\}$$

$$\Rightarrow (x - x_1)i + (y - y_1)j + (z - z_1)k = \lambda(x_2 - x_1)i + \lambda(y_2 - y_1)j + \lambda(z_2 - z_1)k$$

5

$i, j, k$ ৰ সহগ তুলনা কৰি পাওঁ

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &= \lambda(x_2 - x_1) \\ y - y_1 &= \lambda(y_2 - y_1) \\ z - z_1 &= \lambda(z_2 - z_1) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda.$$

∴ উলিয়াব লগা ৰেখাডালৰ নিৰ্ণেয় সমীকৰণ

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2}$$

---

**প্ৰশ্ন** ধৰা হ'ল অন্তৰীক্ষত $P(3, 4, -7)$ আৰু $Q(1, -1, 6)$ দুটা বিন্দু। $PQ$ ৰেখাৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

**Soln** ধৰা হ'ল $P$ ৰ অৱস্থান ভেক্টৰ $\vec{a}$,
$Q$ ৰ " " $\vec{b}$

$$\therefore \vec{a} = 3i + 4j - 7k, \quad \vec{b} = i - j + 6k.$$

∴ $PQ$ ৰেখাৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ

$$\vec{r} = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a})\lambda$$

$$\Rightarrow \vec{r} = (3i+4j-7k) + \lambda\{(1-3)i + (-1-4)j + (6+7)k\}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = 3i+4j-7k - \lambda(2i+5j-13k) \quad \text{——} (1)$$

য'ত λ এটা পেৰামিটাৰ (parameter).

কাৰ্টেজীয় (Cartesian) ৰূপ:

আমি পাওঁ,

$$\vec{r} = 3i+4j-7k - \lambda(2i+5j-13k).$$

$$\Rightarrow xi + yj + zk = 3i+4j-7k - \lambda(2i+5j-13k)$$

$$\Rightarrow (x-3)i + (y-4)j + (z+7)k = -\lambda(2i+5j-13k)$$

সহগ i, j, k ৰ সহগ তুলনা কৰিলে পাওঁ -

$$(x-3) = -\lambda\cdot 2, \quad y-4 = -\lambda\cdot 5, \quad z+7 = -\lambda\cdot(-13)$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+7}{-13} = (-\lambda).$$

এইটোৱেই উলিয়াব লগা সমীকৰণ। λ ক অপসাৰণ কৰি পাওঁ $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+7}{-13}$. //

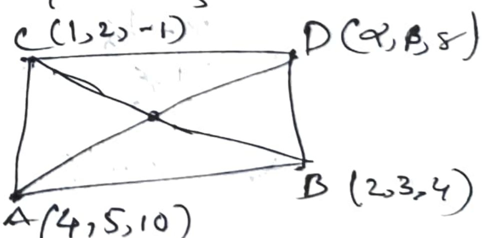
Note: $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+17}{13}$ হিচাপেও লিখিব পৰা যায়.

Ex. A(4, 5, 10), B(2, 3, 4) আৰু C(1, 2, −1) বিন্দু তিনিটা ABCD সামান্তৰিকৰ শীৰ্ষবিন্দু। AB আৰু BC ৰেখাৰ সমীকৰণ উলিওৱা আৰু D বিন্দুৰ স্থানাংক উলিওৱা।

AB ৰ সমীকৰণ (HW): Ans $\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-10}{3}$

BC " " (HW) Ans $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{5}$.

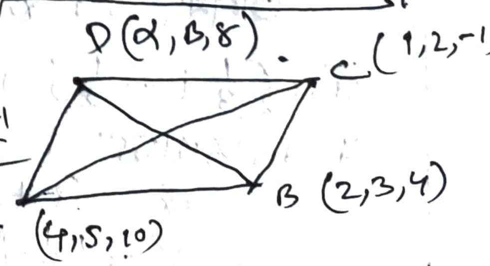
দ্বিতীয় খণ্ড: ধৰাহ'ল D ৰ স্থানাংক $(\alpha, \beta, \gamma)$




প্ৰশ্নমতে, AD কৰ্ণ আৰু CB কৰ্ণ সমদ্বিখণ্ডিত হ'ব। (যিহেতু সামান্তৰিক)

$$\therefore \frac{4+\alpha}{2} = \frac{1+2}{2}; \quad \frac{5+\beta}{2} = \frac{2+3}{2}; \quad \frac{10+\gamma}{2} = \frac{-1+4}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = -1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -7.$$




$$\frac{2+\alpha}{2} = \frac{4+1}{2}, \quad \frac{3+\beta}{2} = \frac{5+2}{2}, \quad \frac{\gamma+4}{2} = \frac{10-1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = 3, \quad \beta = 4, \quad \gamma = 5.$$

Ex. কাৰ্টেজীয়ৰ পৰা ভেক্টৰ সমীকৰণলৈ ৰূপান্তৰণ।
ৰেখাএডাল $A(2,-1,3)$ আৰু $B(4,2,1)$ বিন্দুৰে যায়। ইয়াৰ কাৰ্টেজীয় আৰু ভেক্টৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

Soln. কাৰ্টেজীয় সমীকৰণৰ আৰ্হি হ'ল

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{z-z_1}{z_1-z_2}$$

ইয়াত $x_1=2,\ x_2=4;\ y_1=-1,\ y_2=2,\ z_1=3,\ z_2=1$

∴ সমীকৰণটো $\dfrac{x-2}{2-4}=\dfrac{y+1}{-1-2}=\dfrac{z-3}{3-1}$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-3}{2} \quad //$$

OR

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-2} \quad //$$

ধৰা $\bar{a}=2i-j+3k,\ \bar{b}=4i+2j+k$.

Then vector eqn হ'ব

$$\vec{r}=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\Rightarrow \vec{r}=(2i-j+3k)+\lambda(2i+3j-2k).$$

=×=

Ex. এডাল ৰেখাৰ সমীকৰণ $6x-2=3y+1=2z-2$. ইয়াৰ দিশানুপাত উলিয়াই সমীকৰণটো নতুনকৈ লিখা।

Soln. $6x-2=3y+1=2z-2$

$$\Rightarrow 6\left(x-\tfrac{1}{3}\right)=3\left(y+\tfrac{1}{3}\right)=2(z-1)$$

$$\Rightarrow \frac{x-\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}=\frac{y+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{z-1}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x-\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{1}{3}}{2}=\frac{z-1}{3}$$ (6 ৰে সকলোকে পূৰণ কৰি).

∴ ৰেখাডালৰ দিশানুপাত 1, 2, 3, আৰু $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right)$ ৰেখাডালৰ এটা বিন্দু।

আমি ক'ব পাৰো যে আমাৰ প্ৰদত্ত ৰেখাডাল $\bar{a}=\frac{1}{3}i-\frac{1}{3}j+k$ ৰে যায় আৰু ই $\bar{b}=i+2j+3k$ ৰ সমান্তৰাল। গতিকে ভেক্টৰ সমীকৰণটো হ'ব

$$\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

or $\vec{r}=\left(\frac{1}{3}i-\frac{1}{3}j+k\right)+\lambda(i+2j+3k)$. //

Q. $\frac{x-2}{2} = \frac{2y-5}{-3}$, $z=-1$ ৰেখাডালৰ দিশাংক আৰু ভেক্টৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

Soln ৰেখাডালৰ কাৰ্টেজীয় সমীকৰণ -

$$\frac{x-2}{2} = \frac{2y-5}{-3}, \; z=-1$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{2y-5}{-3} = \frac{z+1}{0} \quad \text{(ভালদৰে মন কৰা)}$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-5/2}{-3/2} = \frac{z+1}{0}$$

∴ ৰেখাডাল $(2, -5/2, -1)$ ৰে যায় আৰু ইয়াৰ দিশানুপাত ~~কাৰ্য্যক্ৰমে~~ $2, -3/2, 0$।

∴ দিশাংক $\frac{2}{\sqrt{2^2+(-\frac{3}{2})^2+0^2}}, \frac{-3/2}{\sqrt{2^2+(-\frac{3}{2})^2+0^2}}, \frac{0}{\sqrt{2^2+(-\frac{3}{2})^2+0^2}}$

8

$$\equiv \frac{2}{5/2}, \frac{-3/2}{5/2}, \frac{0}{5/2}$$

$$= 4/5, -\frac{3}{5}, 0 \text{ Ans}$$

থাকো, দেখা গ'ল যে ৰেখাডাল $\vec{a} = 2i - \frac{5}{2}j - k$ ৰে যায়
আৰু $\vec{b} = \frac{4}{5}i - \frac{3}{5}j + 0k$ ৰ সমান্তৰাল।

$$\therefore \vec{r} = (2i - \tfrac{5}{2}j - k) + \lambda(\tfrac{4}{5}i - \tfrac{3}{5}j + 0k)$$

(Note: ইয়াত $\vec{b} = 2i - \frac{3}{2}j + 0k$ হিচাপেও লব পাৰো)

---

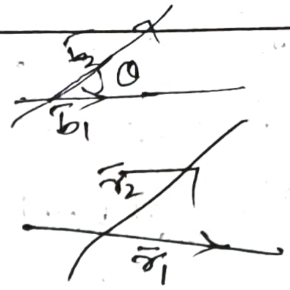
Q. এডাল ৰেখা $(-2, 4, -5)$ ৰে যায় আৰু $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$ ৰ সমান্তৰাল। ৰেখাডাল উলিওৱা

Soln প্ৰদত্ত ৰেখাডালৰ দিশানুপাত $3, 5, 6$।
আৰু উলিয়াব লগা ৰেখাডাল প্ৰদত্ত ৰেখাৰে সমান্তৰাল।
গতিকে উলিয়াব লগা ৰেখাডালৰ দিশানুপাত $3, 5, 6$।
∴ উলিয়াব লগা সমীকৰণ $\frac{x-(-2)}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-(-5)}{6}$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+5}{6}$$

## Angle between two Lines in Space

অন্তৰীক্ষত দুডাল ৰেখাৰ মাজৰে কোণ



ধৰা হ'ল

$\vec{r}_1 = \vec{a}_1 + \lambda_1 \bar{b}_1$

আৰু $\vec{r}_2 = \bar{a}_2 + \lambda_2 \bar{b}_2$ দুডাল ৰেখা। ইহঁতে ক্ৰমে $\bar{a}_1$ আৰু $\bar{a}_2$ বিন্দুৰ মাজেদি যায় আৰু $\bar{b}_1$ আৰু $\bar{b}_2$ ৰ সমান্তৰাল। $\lambda_1$ আৰু $\lambda_2$ দুটা পেৰামিটাৰ (প্ৰাচল)

সেয়েহে:, $\bar{b}_1$ আৰু $\bar{b}_2$ ৰ মাজৰে কোণেই ৰেখাদুডালৰ মাজৰ কোণ হ'ব। ইহঁতৰ মাজৰে কোণ $\theta$ হ'লে

$$\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 = |\bar{b}_1||\bar{b}_2| \cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2}{|\bar{b}_1||\bar{b}_2|} \qquad \text{Result A}$$

এতিয়া ধৰা হওক $\bar{b}_1 = ai + bj + ck$

$\bar{b}_1 = a'i + b'j + c'k$.

(অৰ্থাৎ $a, b, c, a', b', c'$ যথাক্ৰমে $\bar{b}_1$ আৰু $\bar{b}_2$ ৰ স্কেলাৰ উপাংশ।)

$$\therefore \cos\theta = \frac{(ai+bj+ck)\cdot(a'i+b'j+c'k)}{|ai+bj+ck|\,|a'i+b'j+c'k|}$$

$$= \frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \qquad \text{(Result B)}$$

$$\sin^2\theta = 1 - \left\{\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}\right\}^2$$

$$= \frac{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2) - (aa'+bb'+cc')^2}{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)}$$

(by লাগ্ৰাঞ্জ)

$$= \frac{(ab'-a'b)^2+(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2}{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{\sqrt{(ab'-a'b)^2+(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \qquad \text{(R)}$$

Note 1. ~~ৰেখাদুডাল লম্ব হ'লে.~~

আমি যদি দিশানুপাত $a, b, c$, $a', b', c'$ নলৈ তাৰ সেই দিশাংক $l, m, n$, $l', m', n'$ লওঁ তেন্তে $\sqrt{l^2+m^2+n^2}=1 = \sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}$.

$$\therefore \cos\theta = ll' + mm' + nn'$$

$$\sin\theta = \sqrt{(lm'-l'm)^2 + (mn'-m'n)^2 + (nl'-n'l)^2}$$

Note 2. ৰেখাদুডাল লম্ব হ'লে, $\cos\theta = \cos 90 = 0$

$$\therefore \boxed{ll' + mm' + nn' = 0}$$

আৰু

$$\boxed{aa' + bb' + cc' = 0}$$

ৰেখাদুডাল পৰস্পৰ সমান্তৰাল হ'লে $\sin\theta = 0$

10 $\therefore (lm'-l'm)^2 + (mn'-m'n)^2 + (nl'-n'l)^2 = 0$

$$\Rightarrow (lm'-l'm)^2 = 0,\ (mn'-m'n)^2 = 0,\ (nl'-n'l)^2 = 0$$

$$\Rightarrow lm' = l'm,\ mn' = m'n,\ nl' = n'l.$$

$$\Rightarrow \frac{l}{l'} = \frac{m}{m'},\ \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'},\ \frac{n}{n'} = \frac{l}{l'}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}}$$

এইক্ষেত্ৰে আমি পাব পাওঁ $\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}}$.

Ex $\vec{r} = 3i + 2j - 4k + \lambda(i + 2j + 2k)$
$\vec{r} = 5i - 2j + \mu(3i + 2j + 6k)$ ৰ মাজৰ কোণটো নিৰ্ণয় কৰা

ইয়াত প্ৰথম ৰেখাডাল $\vec{b_1} = i + 2j + 2k$ ৰ সমান্তৰাল
2য় " $\vec{b_2} = 3i + 2j + 6k$ " "

$\therefore \vec{b_1}$ আৰু $\vec{b_2}$ ৰ মাজৰ কোণ $\theta$ হ'লে,

$$\cos\theta = \frac{\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|} = \left|\frac{(i+2j+2k)\cdot(3i+2j+6k)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\ \sqrt{3^2+2^2+6^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+4+12}{3\times 7}\right| = \frac{19}{21}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right).$$

Q. $\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{4}$

আৰু $\frac{x+1}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{2}$ ৰেখাদুডালৰ মাজৰ কোণ উলিওৱা।

Sol$^n$ প্ৰথম ৰেখাডালৰ দিশানুপাত 3, 5, 4

২য় " " 1, 1, 2.

∴ ৰেখাদুডালৰ মাজৰ কোণ θ হ'লে

$$\cos\theta = \frac{3\cdot1+5\cdot1+4\cdot2}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}$$

$$= \frac{16}{\sqrt{50}\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{3}}{15} \quad \text{Ans}$$

$\frac{16}{5\sqrt{2}\sqrt{6}}$

$\frac{16}{5\sqrt{12}} = \frac{\cancel{16}^{\,8}}{\cancel{10}\sqrt{3}_{\,5}}$

$= \frac{8\sqrt{3}}{15}$

Q. p ৰ মান উলিওৱা যদি $\frac{1-x}{3}=\frac{7y-14}{2p}=\frac{z-3}{2}$

আৰু $\frac{7-7x}{3p}=\frac{y-5}{1}=\frac{6-z}{5}$

ৰেখাদুডাল লম্বভাৱে থাকে।

Sol$^n$ প্ৰথমে সমীকৰণ দুটা প্ৰকৃত আৰ্হিত লিখি লোৱা হওক

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{\left(\frac{2p}{7}\right)}=\frac{z-3}{2}$$

আৰু $$\frac{x-1}{\left(-\frac{3p}{7}\right)}=\frac{y-5}{7}=\frac{z-6}{-5}.$$

ইহঁত লম্ব হ'ব যদিহে ~~দিশানুপাত~~

$$(-3)\times\left(-\frac{3p}{7}\right)+\left(\frac{2p}{7}\right)\times 7+2\times(-5)=0$$

$$\Rightarrow \frac{9p}{7}+\frac{2p}{7}-10=0 \Rightarrow \frac{11p}{7}-10=0 \Rightarrow p=\frac{70}{11} \quad \text{Ans}$$

Q. দেখুওৱা যে $\frac{x-5}{7}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z}{1}$ and $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$

ৰেখাদুডাল পৰস্পৰ লম্ব।

Sol$^n$ ইয়াত $7\times1+(-5)\times2+1\times3$

$= 7-10+3$

$= 0$

∴ ৰেখাদুডাল লম্ব