সকলো মৌলিকক্ষ A ৰ $A^{-1}$ নাথাকে:

উদা. ধৰা $A = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

প্ৰক্ৰিয়া $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} A \qquad C_1 \to \frac{1}{10} C_1, \; C_2 \to \frac{1}{2} C_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} A.$$

দেখা গ'ল যে প্ৰথম স্তম্ভত সকলো entry (প্ৰবিষ্টি) শূন্য। সেয়ে A ৰ প্ৰতিলোম নাই।

# নিৰ্ণায়ক (Determinant)

মৌলকক্ষৰ লগত জড়িত থকা আন এটা শব্দ হ'ল নিৰ্ণায়ক। আমি আগতে পাই আহিছো যে মৌলকক্ষ একধৰণৰ সাজোন হে।

কিন্তু প্রতিটো বৰ্গ মৌলকক্ষৰ লগত আমি এটা বাস্তৱসংখ্যা বিশেষভাৱে জড়িত কৰিব পাৰো।

যেনে, $(a)$ মৌলকক্ষৰ লগত আমি $a$ বাস্তৱ সংখ্যাক জড়িত কৰিব পাৰো। $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ মৌলকক্ষৰ লগত আমি $ad-bc$ বাস্তৱ সংখ্যাক জড়িত কৰিব পাৰো ইত্যাদি।

$ad-bc$ বাস্তৱ সংখ্যাটো বুজাবলৈ গণিতত $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ প্রতীক ব্যৱহাৰ কৰা হয় আৰু ইয়াক $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ মৌলকক্ষৰ নিৰ্ণায়ক বোলে।

<u>Note</u> Matrixৰ বাবে [ $\cdot$ ] আৰু ( $\cdot$ ) প্রতীক ব্যৱহাৰ হয়। determinantৰ বাবে | $\cdot$ |

(i) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\times 2 - 1\times 3 = 5$

$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)4 - 0\times 2 = -4$ আদি।

$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ (তিনিমাত্ৰাৰ) মৌলকক্ষৰ লগত জড়িত নিৰ্ণায়কটো হ'ল $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

যত, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

Ex. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

$= 1\times(45-48) - 2\times(36-42) + 3(32-35)$

$= -3 + 12 - 9$

$= 0$ Ans.

অনুৰাশি আৰু সহৰাশি :
Minor and cofactors.
(মাইনৰ আৰু কো ফেক্টৰ)

তিনিটা শাৰী আৰু তিনিটা স্তম্ভ থকা নিৰ্ণায়ক এটাক আমি তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক বুলি কওঁ। একেদৰে $n$ টা শাৰী আৰু $n$ টা স্তম্ভ থকা নিৰ্ণায়কক $n$-মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক বুলি কোৱা হয়।

এতিয়া কোনো নিৰ্ণায়কৰ কোনো এটা মৌলৰ অনুৰাশি হৈছে সেই মৌলটো থকা শাৰী বা স্তম্ভ বাদ দি পোৱা নিৰ্ণায়কটো।

তিনি মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষটো আকৌ এবাৰ লোৱা হ'ল। ধৰা $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

এতিয়া $a_1$ৰ অনুৰাশি : $a_1$ মৌলটো প্ৰথম শাৰী আৰু প্ৰথম স্তম্ভত আছে।

$\therefore$ $a_1$ ৰ অনুৰাশি হ'ব প্ৰথম শাৰী আৰু প্ৰথম স্তম্ভটো বাদ দি পোৱা নিৰ্ণায়কটো। অৰ্থাৎ ই-
2 হ'ব $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

একেদৰে $a_2$ ৰ অনুৰাশি $= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. কাৰণ আমি ইয়াত দ্বিতীয় শাৰী আৰু প্ৰথম স্তম্ভ বাদ দিম।

$a_3$ ৰ অনুৰাশি $= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ $\because$ $C_1$ আৰু $R_3$ বাদ দি।

$b_1$ ৰ অনুৰাশি $= \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

$b_2$ ৰ অনুৰাশি $= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$b_3$ " " $= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$c_1$ ৰ অনুৰাশি $= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$,

$c_2$ " " $= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$c_3$ " " $= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

অনুৰাশি আৰু সহৰাশি :
Minor and cofactors.
(মাইনৰ আৰু কো ফেক্টৰ)

তিনিটা শাৰী আৰু তিনিটা স্তম্ভ থকা নিৰ্ণায়ক এটাক আমি তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক বুলি কওঁ। একেদৰে $n$ টা শাৰী আৰু $n$ টা স্তম্ভ থকা নিৰ্ণায়কক $n$-মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক বুলি কোৱা হয়।

এতিয়া কোনো নিৰ্ণায়কৰ কোনো এটা মৌলৰ অনুৰাশি হৈছে সেই মৌলটো থকা শাৰী বা স্তম্ভ বাদ দি পোৱা নিৰ্ণায়কটো।

তিনি মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষটো আকৌ একবাৰ লোৱা হ'ল। ধৰা $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

এতিয়া $a_1$ ৰ অনুৰাশি : $a_1$ মৌলটো প্ৰথম শাৰী আৰু প্ৰথম স্তম্ভত আছে।

$\therefore$ $a_1$ ৰ অনুৰাশি হ'ব প্ৰথম শাৰী আৰু প্ৰথম স্তম্ভটো বাদ দি পোৱা নিৰ্ণায়কটো। অৰ্থাৎ ই-
2 হ'ব $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

একেদৰে $a_2$ ৰ অনুৰাশি $= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. কাৰণ আমি ইয়াত দ্বিতীয় শাৰী আৰু প্ৰথম স্তম্ভ বাদ দিম।

$a_3$ ৰ অনুৰাশি $= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ .. $C_1$ আৰু $R_3$ বাদ দি।

$b_1$ ৰ অনুৰাশি $= \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

$b_2$ ৰ অনুৰাশি $= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$b_3$ " " $= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$c_1$ ৰ অনুৰাশি $= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$,

$c_2$ " " $= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$c_3$ " " $= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

সহৰাশি $= (-1)^{i+j} \times$ অনুৰাশি ; ইয়াত
$i$ আৰু $j$ ক্ৰমে শাৰী আৰু স্তম্ভৰ নম্বৰ ;

ওপৰৰ উদাহৰণটোত $c_1$ মৌলটোৰ শাৰী নং 1 আৰু স্তম্ভ নম্বৰ 3, আনহাতে ইয়াৰ অনুৰাশি
$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$. গতিকে $c_1$ৰ সহৰাশি

$$= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$b_1$ ৰ সহৰাশি $= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ [কাৰণ শাৰী নং 1 স্তম্ভ নং 2.]

$$= -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$c_3$ ৰ সহৰাশি $= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

3 $$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$ ইত্যাদি।

**নিৰ্ণায়কৰ ধৰ্ম :**

(A) কোনো নিৰ্ণায়কৰ শাৰীবোৰ স্তম্ভ আৰু স্তম্ভবোৰ শাৰী কৰিলে মানৰ সলনি নহয়।

(B) নিৰ্ণায়কৰ এযোৰ ওচৰা ওচৰিকৈ থকা শাৰী (বা স্তম্ভ) সালসলনি কৰিলে মান একে থাকে কিন্তু চিহ্ন সলনি হয়। (+ থাকিলে '−' আৰু '−' থাকিলে '+' হয়),

(C) কোনো নিৰ্ণায়কৰ দুটা শাৰী (বা স্তম্ভ) একে হ'লে নিৰ্ণায়কটোৰ মান শূন্য হ'ব।

Ex. $A = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ মৌলকেইটাৰ অনুৰাশি আৰু সহৰাশিবোৰ লিখা। সহৰাশি $(-1)^{1+1}\times 2 = 2$

Ans: 4 ৰ অনুৰাশি $= 2$,
" $= -3$, সহৰাশি $(-1)^{1+2}\times(-3) = 3$
$-7$ ৰ " $= -7$, সহৰাশি $(-1)^{2+1}\times(-7) = 7$
$-3$ ৰ " $= 4$, সহৰাশি $(-1)^{2+2}\times 4 = 4$
2 ৰ "

প্ৰ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & 2 & -1\\ 2 & -4 & 3\end{bmatrix}$ ৰ অনুৰাশি/সহৰাশি উলিওৱা।

**Ans**: $A$ ৰ লগত জড়িত নিৰ্ণায়কটো $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & 2 & -1\\ 2 & -4 & 3\end{vmatrix}$

1 ৰ অনুৰাশি, $M_{11}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{vmatrix} = 2\times3-(-4)\times(-1)=6-4=2$

সহৰাশি $C_{11}=(-1)^{1+1}\times 2=2$.

2 ৰ অনুৰাশি, $M_{12}=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-9+2=-7$

সহৰাশি $C_{12}=(-1)^{1+2}(-7)=7$.

3 ৰ অনুৰাশি, $M_{13}=\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=12-4=8$

সহৰাশি, $C_{13}=(-1)^{1+3}\times 8=8$.

$-3$ ৰ অনুৰাশি, $M_{21}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -4 & 3\end{vmatrix}=6+12=18$

সহৰাশি $C_{21}=(-1)^{2+1}\times 18=-18$

4 2 ৰ অনুৰাশি $M_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3-6=-3$

সহৰাশি $C_{22}=(-1)^{2+2}\times(-3)=-3$

$-1$ ৰ অনুৰাশি $M_{23}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-4-4=-8$

সহৰাশি $C_{23}=8$

2 ৰ অনুৰাশি $M_{31}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-2-6=-8$

সহৰাশি $C_{31}=8$

$-4$ " অনুৰাশি $M_{32}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 2\end{vmatrix}=2+6=8$

সহৰাশি $C_{32}=-8$

3 " অনুৰাশি $M_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 2\end{vmatrix}=2+6=8$

সহৰাশি $C_{33}=8$.

---

এবাৰ নিৰ্ণায়কটোৰ মান নিৰ্ণয় কৰা:—

$f(x+i)=x$

$f(x+iy)=0$

$x=0$, $y$ ever

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & 2 & -1\\ 2 & -4 & 3\end{vmatrix}$$

$$=1\times\begin{vmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 2 & -4\end{vmatrix}$$

$$=6-4-2\times(-9+2)+3(12-4)$$

$$=6-4+14+24$$

$$=40$$

## Notes

Q. দেখুওৱা যে $|A| = |A'|$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$ (শাৰীবোৰ স্তম্ভ স্তম্ভবোৰ শাৰী)

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (6-4) + 3(6+12) + 2(-2-6)$$

$$= 2 + 54 - 16$$

$$= 56 - 16$$

$$= 40.$$

Thus $|A'| = |A|$.

---

~~Ex. ধৰা~~ $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$

$= \cancel{a_{11}(b_{22} - c_{33})}$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ c_{31} & c_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{vmatrix}$$

---

Q. $|A|$ ৰ দুটা ওচৰা ওচৰি শাৰী সালসলনি কৰি $(R_1 \leftrightarrow R_2)$ চোৱা যাওক। নতুন নিৰ্ণায়কটো হ'ব –

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = (-3) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (-3) \times (6+12) - 2(3-6) + (-1)(-4-4)$$

$$= -54 + 6 + 8$$

$$= -54 + 14$$

$$= -40.$$

অৰ্থাৎ $\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -|A|.$

Q. যদি দুটা স্তম্ভ বা শাৰী একে হয় :– তেন্তে $|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (6+2) + 3(6-6) + 1(-2-6)$$

$$= 8 + 0 - 8 = 0$$